

“The essence of mathematics lies in its freedom” ~Georg Cantor

Verslag van een vakdidactisch ontwerponderzoek naar het in vrijheid
stimuleren van wiskundige ontwikkeling

Door: Elizabet Zwetsloot

De verlegenheid

Vrijheid is het mooiste en het moeilijkste dat er bestaat. Werkend in een vorm van onderwijs, waarin vrijheid een basisuitgangspunt is, word ik steeds opnieuw uitgedaagd om goed na te denken over wat die vrijheid nu precies inhoudt, waarom het zo belangrijk is en welke verantwoordelijkheid het voor wie met zich meebrengt. Om te komen tot een goed onderwerp voor dit vakdidactisch ontwerponderzoek was de eerste vraag om te beantwoorden, waar ik in het vormgeven van mijn onderwijs tegenaan loop en vervolgens voor wie die verlegenheid in handelen daadwerkelijk een probleem is.

Wat het voor mij lastig heeft gemaakt om een concrete verlegenheidssituatie te beschrijven, is het feit dat het democratisch onderwijs, waarin ik werkzaam ben, geen concrete leerdoelen voor ogen heeft. Dat wil niet zeggen dat dit onderwijs doelloos is, maar de doelen zijn abstracter en gaan meer over achterliggende waarden dan over concrete leerdoelen die behaald dienen te worden. In gesprekken met collega's komt dat ook terug, want als je niet verantwoordelijk bent voor het stellen van doelen, wat is je rol dan? Waar ben je dan precies wel voor verantwoordelijk? Als vakdocent op een democratische school bied je inspiratie op jouw vakgebied en ben je beschikbaar als expert. Hoe je hier vorm aan geeft is vrij, althans je geeft hieraan vorm in voortdurende afstemming met alle betrokkenen. Dat is precies wat er moeilijk is aan die vrijheid, voor mij en mijn collega's, maar zeker ook voor de leerlingen. Er zijn geen objectieve criteria, dus is steeds de vraag, wanneer ben je tevreden over jezelf en jouw bijdrage aan het geheel en waar houdt jouw vrijheid op, omdat je de grens van de ander overschrijdt.

Wat in ieder geval een voortdurende zoektocht is voor mij en mijn collega's, is het bedienen van een zeer diverse groep leerlingen. Hoe verdeel je je tijd eerlijk over de vragen die er zijn en heb je daarnaast nog tijd en/of ruimte voor leerlingen die niet expliciet hun vraag bij je neerleggen, maar door een niet weten wat zij nog niet weten hun vraag nog niet kunnen stellen. In dit onderzoek heb ik me daarom gericht op de vraag:

Hoe kan ik mijn onderwijs zo inrichten dat de leerling kennis maakt met (het plezier, de uitdaging, schoonheid en/of relevantie van de) wiskunde, zodat de mogelijkheid ontstaat dat hij zich hierin verder ontwikkelt?

Kijk op wiskundige ontwikkeling

In de verkenning van de literatuur werd mijn aandacht vooral getrokken naar de verschillende manieren om naar het leren van wiskunde te kijken. Ik wil graag mogelijkheden creëren voor mijn

leerlingen om zich wiskundig te ontwikkelen en daarvoor is meer kennis over hoe leerlingen wiskunde kunnen leren gewenst.

Nu heb ik door al mijn persoonlijke ervaringen met wiskundeonderwijs, zowel door te ondergaan als door erover te lezen en het vorm te geven een vrij specifieke visie op wiskundige ontwikkeling. Het is een web van ideeën over leren denken en onderzoeken, over hoe wiskundige concepten in elkaar grijpen en wanneer voor wie wiskundige technieken relevant kunnen zijn. Het is een web van talloze losse eindjes, vraagtekens en voorlopige antwoorden. Dit is heerlijk en frustrerend tegelijk, want het is leuk om steeds weer op onderzoek uit te kunnen gaan, ideeën aan te scherpen en wijzer te worden en tegelijkertijd is de realisatie dat definitieve antwoorden niet zullen komen soms ook erg frustrerend.

Mijn literatuurverkenning startte bij de boeken *Mathematical mindsets* (Boaler, 2016) en *Volgens Barton* (Barton, 2018). Beide auteurs onderkennen het belang van wetenschappelijk onderzoek en dan met name het onderzoek naar de werking van onze hersenen als belangrijke onderbouwing voor het vormgeven van wiskundeonderwijs. Toch is er wezenlijk verschil in hun beeld van ideaal vormgegeven wiskundeonderwijs. Barton legt de nadruk op de beperkte capaciteit van ons werkgeheugen en ziet dat wat aan wiskunde geleerd dient te worden als een gegeven. Boaler ziet de wiskunde meer als een manier van naar de wereld kijken en legt de nadruk op de bijna onbegrensde groeimogelijkheden van onze hersenen. Nu passen de uitgangspunten die Boaler hanteert beter bij het democratisch onderwijs, juist omdat we hier dat wat geleerd dient te worden niet als een gegeven beschouwen. Ik haal uit haar werk dan ook mooie inzichten die ik direct toe kan passen in het vormgeven van onderwijs dat antwoord geeft op mijn onderzoeksvraag. Zo beschrijft ze wiskundige problemen met een lage vloer en een hoog plafond. Dit wil zeggen dat een probleem met weinig achtergrondkennis te begrijpen is, er op verschillende manieren een oplossing kan worden gevonden en dat daarin ook uitdagingen liggen voor leerlingen met wel meer wiskundige kennis en vaardigheden. Kortom, de aard van een dergelijk probleem zorgt automatisch voor een goede differentiatie, iedereen kan op zijn eigen niveau meedoen. Barton maakt ook gebruik van een dergelijk principe in het hoofdstuk over doelbewuste oefening, maar legt daarin de nadruk op het leerdoel dat jij voor je leerlingen voor ogen hebt. Boaler gaat meer uit van het proces, het leren van elkaar door denkprocessen te delen en elkaar en jezelf te overtuigen en misschien nog wel belangrijker dat iedere leerling met plezier bezig kan zijn met wiskundige activiteiten.

Het werk van Barton geeft mij vooral inzichten in hoe ik de leerlingen die zichzelf al een specifiek doel hebben gesteld met betrekking tot het leren van wiskunde, zoals een examen, betere begeleiding kan bieden. Voor hen is het relevant om te weten hoe zij doelgericht te werk kunnen gaan en nieuwe kennis in hun lange termijn geheugen kunnen opslaan. In relatie tot mijn onderzoeksvraag is het minder bruikbaar, omdat een duidelijke visie op wat wiskunde eigenlijk is en wat we met wiskundeonderwijs beogen mist.

Een interessante visie op wat het leren van wiskunde kan inhouden in een omgeving waarin leerlingen vrij zijn om te leren komt van Peter Gray (2010). Gray maakt een indeling in het leren van wiskunde in vier categorieën gebaseerd op type motivatie, te weten:

1. Speelse of pure wiskunde
2. Instrumentele wiskunde
3. Didactische wiskunde
4. Wiskunde ten behoeve van een toelatingstest voor een universiteit

Gray geeft van alle categorieën voorbeelden van hoe leerlingen op een zelfgekozen manier wiskunde kunnen leren. De didactische wiskunde is hierin een beetje een vreemde eend in de bijt. Gray noemt

iets didactische wiskunde als het leren van die wiskunde gaat volgens een bepaald curriculum. Het is daarmee de enige categorie waarin de wiskunde niet van direct belang is voor de lerende. In zijn voorbeelden is ook te zien dat de lerende snel interesse verliest. Een spel dat een door een ander bepaald wiskundig doel heeft, is lang niet zo leuk en interessant als een spel, waarin de wiskunde is geïntegreerd en een middel vormt op basis waarvan beslissingen kunnen worden genomen, zoals in het echte leven.

De speelse of pure wiskunde is de meest intrinsieke vorm. Het sluit aan bij hoe ook Boaler beschrijft dat de schoolwiskunde ver af staat van hoe wiskundigen met wiskunde bezig zijn. Die pure wiskunde staat veel dichterbij een kind dat leert tellen en daarin allerlei patronen ontdekt, dan bij de schoolwiskunde. Voor Boaler is dit een reden om verandering te willen brengen in hoe er naar wiskunde gekeken wordt. Andere onderzoekers (Barton, 2018; Sweller, 2021) wijzen erop dat er risico's kleven aan leerlingen op dezelfde manier laten leren als experts, omdat experts op een andere manier leren dan beginners. Beginners zouden in de eerste fase van kennisverwerving meer baat hebben bij het imiteren van een voorbeeld, van directe instructie, dan van het zelf herontdekken van bestaande kennis. Wanneer leerlingen als beginner of als expert mogen worden beschouwd kan echter per onderdeel verschillen. Daarnaast kan onderscheid worden gemaakt tussen biologisch primaire en biologisch secundaire kennis (Sweller, 2021; Geary, 1995). Biologisch primaire kennis opdoen, doen we automatisch, omdat we geëvolueerd zijn om dit te doen. Dit in tegenstelling tot het opdoen van biologisch secundaire kennis. Dit is kennis die we in cultureel opzicht van belang achten, maar dit belang is zo recent, dat evolutie nog geen kans heeft gehad ons zo te programmeren dat we deze kennis zo als vanzelf kunnen opdoen als biologisch primaire kennis. Het kost daarom moeite om deze kennis te verwerven. Volgens Sweller (2021) hebben scholen geen rol in het verwerven van biologisch primaire kennis, omdat dit nu eenmaal vanzelf gaat. Hij ziet het als de taak van scholen om leerlingen zo efficiënt als mogelijk biologisch secundaire kennis te laten verwerven. Toch zijn er ook aanwijzingen dat het aanleren van wiskunde als een vaststaande set van regels en procedures het conceptuele begrip, dat wellicht juist gezien kan worden als biologisch primair, in de weg zou kunnen staan (Boaler, 2016; Gray, 2010). De paradox van de onderzoekbaarheid van ons biologische mechanisme tot leren beschrijft Rob Martens in *We moeten spelen* (2019). Spelen is leren, maar zodra je er een specifiek doel aan koppelt is het geen spelen meer en verliest het ook zijn kracht. Dit verlies van kracht werd ook duidelijk geïllustreerd door de voorbeelden die Gray (2010) beschreef in de categorie didactische wiskunde.

Zoals Gödel bewees dat ieder axiomatisch systeem óf niet volledig óf niet consistent is, zo lijkt dit ook zo te zijn met iedere theorie over het leren van wiskunde. Iedere visie is opgebouwd vanuit impliciete en/of expliciete aannames en hoe bewust we ons ook zijn van een principe als cognitieve dissonantie, we kunnen ons er nooit helemaal aan onttrekken. Ik kan mezelf verliezen in het lezen van literatuur omdat ik precies wil weten hoe het zit, omdat ik het beste wil kunnen doen voor mijn leerlingen, maar dat 'beste' is een ongrijpbaar en daarom onmeetbaar iets. Ik kan me blijven verwonderen over de rijkheid van hoe mensen leren en hoe mensen hierover theorieën opbouwen.

Ontwerpeisen en randvoorwaarden

De literatuurverkenning gaf me allerlei aanknopingspunten om verder te experimenteren met het wiskundeonderwijs in het democratisch onderwijs op een manier dat ik zo veel mogelijk leerlingen de kans zou kunnen bieden om kennis te maken met de wiskunde of te ervaren wat wiskunde is of kan zijn. De vormgeving van mijn onderwijs heb ik getoetst aan de volgende ontwerpeisen:

1. Het aanbod benut de kracht van spelend leren, zoals Martens (2019) beschrijft. Dit wil zeggen dat het laagdrempelig is voor de leerling. De leerling kan deelnemen zonder specifieke voorkennis en hoeft ook niet voor langere tijd commitment te tonen om zo te ervaren dat wiskunde een cognitief spel kan zijn.
2. Het aanbod heeft een lage vloer en hoog plafond, zoals Boaler (2016) beschrijft en is daarmee uitdagend voor een diversiteit aan leerlingen tegelijkertijd.
3. Het aanbod biedt inzicht in de relevantie van de wiskunde voor de leerling persoonlijk. Dit wil zeggen dat een leerling eigen motivatie kan ontwikkelen, omdat hij ontdekt dat het leuk is of dat wiskundige technieken op andere voor hem relevante plaatsen inzetbaar is. Het aanbod richt zich daarmee op pure en/of instrumentele wiskunde beschreven door Gray (2010).

Omdat het onderwijs zo is opgezet dat ik als vakdocent niet vast zit aan opgelegde programma's en jaarplanningen en ik op ieder moment de mogelijkheid heb om iets nieuws te initiëren, een activiteit te organiseren of mijn reeds bestaande aanbod aan te passen, lijken er op het eerste gezicht weinig randvoorwaarden te bestaan. Toch bestaan er tal van randvoorwaarden, die bepaalde keuzes forceren. Soms ben ik me daar op het moment zelf niet eens van bewust, maar kan ik dat alleen achteraf beredeneren. Zo kan het zijn dat ik graag met een bepaald groepje leerlingen een wekelijkse activiteit zou willen doen, maar lukt het niet om hiervoor een moment in de week te vinden, dat één ieder past. Ook kan het zijn dat bepaalde combinaties van leerlingen niet zo goed werken, waardoor leerlingen niet meer willen deelnemen.

Werkwijze

Een setting waarin je vrij kunt experimenteren lijkt voor een ontwerponderzoek een zegen, maar die vrijheid maakt verantwoording van keuzes een stuk ingewikkelder. Er zijn zo veel mogelijkheden om uit te proberen, dat de uiteindelijke keuzes die je maakt niet zo duidelijk zijn toe te schrijven aan specifieke theorieën of ervaringen, maar juist die ongrijpbare interactie ertussen en alle randvoorwaarden waar ik bewust of onbewust mee te maken heb. Ontwerpen, uitvoeren en evalueren verliep, passend bij hoe de school werkt, niet altijd even mooi cyclisch en gestructureerd, maar juist grillig en organisch. Soms probeerde ik iets uit om me achteraf pas te realiseren wat ik nu eigenlijk uitprobeerde en wat ik ervan leerde. Onderzoeken is voor mij spelend leren, open staan voor alles wat er binnenkomt door te lezen, iets uit te proberen en impliciete en expliciete feedback van leerlingen, collega's en externe bronnen te interpreteren en integreren in weer nieuwe acties om uit te proberen. De mogelijkheden zijn eindeloos. Op DOE040 maken we voor de leerlingen vaak onderscheid in drie vormen van leren, te weten: spelend leren, onderzoekend leren en leren voor meesterschap. Mijn collega filosofie merkte op dat er ook in onderzoek doen een lijn zit van spelend leren naar leren voor meesterschap, waarin het begint met verwondering, waarna je procedures vastlegt en volgt om de stappen die je maakt door anderen controleerbaar te maken en het hele proces herhaalbaar. Toch ben ik huiverig voor een afbakening, die de controleerbaarheid en herhaalbaarheid kunnen vergroten. Ik heb al vaak gemerkt dat de focus op een te smal doel, maakt dat de essentie wordt gemist. Dan ben je misschien heel goed in staat om te meten of je de doelen die je stelt worden gehaald, maar blijken die doelen achteraf helemaal niet zo relevant. Het is wel

iets waar ik tijdens het onderzoeksproces steeds mee worstel. Hoe verantwoord ik de keuzes die ik maak, die gebaseerd zijn op mijn persoonlijke nieuwsgierigheid? Bestaat er wel een objectieve werkelijkheid op basis waarvan ik die keuzes ook zou kunnen maken? Hoe vind ik een structuur die voldoende navolgbaar is, zonder dat het gaat knellen? Hoe speel ik het spel op een manier dat ik me vrij voel en van waarde en jij ook? Speel ik jouw spel en geeft me dat voldoende voldoening of probeer ik er mijn eigen spel van te maken en wil jij dan nog wel met mij meespelen?

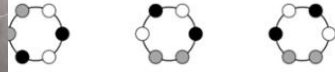
Met het laagdrempelige aanbod was ik al langer aan het experimenteren op de twee democratische scholen, DOE040 en LOS Deurne, waar ik mijn bijdrage lever aan de wiskundige ontwikkeling van de leerlingen. Ik kon het ontwerponderzoek daarom starten met een voor een aantal leerlingen al redelijk ingeburgerd wekelijks of tweewekelijks uur met wiskundige denkactiviteiten. Hoewel ik ook de mogelijkheid had om helemaal iets nieuws te starten, koos ik ervoor om deze uren in eerste instantie te gebruiken om daarbinnen het aanbod te ontwikkelen passend bij de gestelde ontwerpeisen. Iets nieuws heeft altijd een hogere drempel dan iets dat al bekend is en de insteek van de wiskundige denkactiviteiten die ik organiseerde was al dat er geen commitment voor meerdere bijeenkomsten of noodzakelijke achtergrondkennis vereist zou zijn om deel te nemen. Dit was dan ook een ideaal startpunt om te onderzoeken wat er zou gebeuren als ik hierbinnen meer zou gaan letten op die lage vloer en het hoge plafond en de persoonlijke relevantie voor deelnemende leerlingen. Ook gaf het me de kans om een ontwerp of een specifieke opgave op twee verschillende plekken uit te voeren en de verschillen te analyseren.

Ontwerpen, uitvoeren en data verzamelen

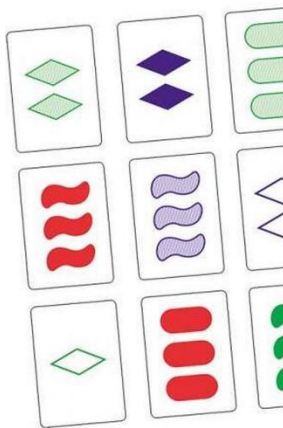
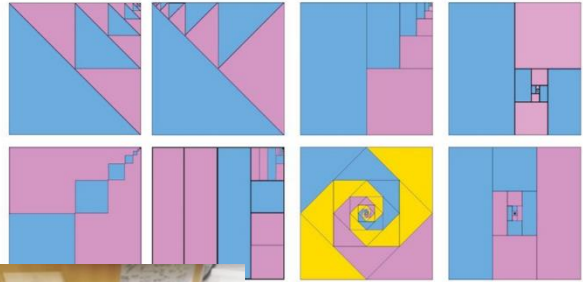
Zoals in de werkwijze beschreven is het ontwerpen, uitvoeren en het verzamelen van data een organisch proces geweest. Terwijl ik nadacht over een ontwerp dat goed aan zou sluiten bij de ontwerpeisen, ontdekte ik dat ik tegelijkertijd niet anders kon dan de nieuw opgedane inzichten uit de literatuur al toe te passen tijdens de al geplande activiteiten en besloot ik dat het voor mijn onderwijs passender zou zijn om dat gewoon te laten gebeuren en mijn data te gaan verzamelen door voor mezelf nauwkeurig in een portfolio bij te gaan houden hoe de activiteiten verliepen, daarbij verschillende keren ook geluidsopnames te maken, de leerlingen continu te bevragen wat de activiteit hen opleverde en verschillende collega's mee te laten lezen en een activiteit bij te laten wonen om mij vervolgens van feedback te voorzien. Zodoende verkreeg ik verschillende vormen van kwalitatieve data om te analyseren. Ik heb gebruik gemaakt van oude opgaven van de wiskunde olympiade, de websites youcubed.org (die is opgezet vanuit de visie van Jo Boaler), math4all.nl, mathigon.org, oude examens, het tijdschrift Pythagoras met bijbehorende website, de leermiddelencollectie van het Freudenthal Instituut en soms ook 'gewoon' de methodeboeken van Moderne Wiskunde, die op school in de kast staan. Het ontwerpen van de activiteit bestond steeds uit goed bedenken welke leerlingen ik verwachtte, met welke redenen ze mee zouden willen doen aan de activiteit en één of enkele opgaven zoeken die in mijn optiek zouden aansluiten bij dat groepje als geheel en bij de persoonlijke belangen van iedere leerling die ik op dat moment verwachtte. Ik kon moeilijk ontwerpen, uitvoeren, verbeteren en opnieuw uitvoeren, omdat ik nooit een setting zou kunnen creëren, waarin bij het opnieuw uitvoeren de beginsituatie hetzelfde is. Ik heb ofwel te maken met een ander groepje leerlingen, met andere nuances in waarom ze deelnemen, ofwel het zijn dezelfde leerlingen, maar hun beginsituatie is veranderd. Ik kijk daarom terug op een evoluerend onderzoeksproces in plaats van een klassiek ontwerponderzoek. Gedurende de onderzoeksperiode bereikte ik steeds meer leerlingen en deed ik verschillende inzichten op. Inzichten die ik thematisch zal beschrijven als resultaten van het onderzoeksproces.



Armbandjes met kralen. Elk armbandje heeft zes kralen: twee witte. Sommige armbandjes lijken op het eerste gezicht verschillend, één om- of ronddraait, blijkt hij toch gelijk te zijn aan de andere armbandjes bijvoorbeeld hetzelfde.



Hoeveel echt verschillende armbandjes kan Lieneke maken?
 A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 15



Knickknaggers in een pot
 Je hebt wel eens een glazen pot staan, helemaal gevuld met knickknag. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knickknag er in de pot zit. Degene die het aantal precies raadt of er dichterbij komt, krijgt een prijs. Uit onderzoek blijkt dat de knickknag ongeveer 1/3 van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een goede schatting te maken van het aantal knickknag in de pot. Hiervoor geldt het volgende stappenplan:



1. Meet de diameter van een knickknag en bereken daarmee de inhoud van een knickknag. De inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van een knickknag. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knickknag in de pot.
 2. De diameter van een knickknag is te berekenen met de formule: $I_{\text{knickknag}} = 0,5236d^3$
 3. Meet de diameter van de knickknag in cm en $I_{\text{knickknag}}$ de inhoud van een knickknag in cm^3 .
 4. Het aantal knickknag in de pot is te berekenen met de formule: $K = \frac{I_{\text{pot}}}{I_{\text{knickknag}}}$
 5. Het aantal knickknag in de pot is te berekenen met de formule: $K = a \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$

a Geef een redelijke schatting van het aantal knickknag in de pot.

Het stappenplan kan worden vertaald in twee formules:

$$I_{\text{knickknag}} = 0,5236d^3$$

$$K = \frac{I_{\text{pot}}}{I_{\text{knickknag}}}$$

De afgeronde waarde van K is het aantal knickknag in de pot en I_{pot} is de inhoud van de glazen pot in cm^3 . Je kunt uit deze formules een formule afleiden voor K , uitgedrukt in I_{pot} en d . Deze formule is van de vorm

$$K = a \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$$

b Laat zien hoe je deze formule afleidt en rond de waarde van a af op drie decimalen. (naar: examen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak)

Visuele indruk van het ontwerpproces

Resultaten

De kracht van samen leren

Ik begon vol enthousiasme te zoeken naar opgaven met een lage instap, maar ook met mogelijkheden tot geavanceerder onderzoek. De gedachte dat iedereen die deelneemt dan op zijn eigen niveau mee kan doen, is aantrekkelijk. Al snel kom ik erachter dat het weliswaar niet heel ingewikkeld is om dit soort opgaven te vinden en dat het ook wel lukt om verschillende soorten leerlingen tegelijkertijd hieraan te laten werken, maar als de verschillen binnen de groep te groot zijn, valt de groep uit elkaar en ontstaan er verschillende processen om te begeleiden in plaats van één groepsproces. Dit maakt het voor mij ingewikkeld, omdat ik mezelf tijdens de activiteit toch vooral zie als procesbegeleider, omdat er aan de activiteit niet zo zeer leerdoelen gekoppeld zijn, waarvan ik dan achteraf kan bepalen in welke mate die zijn behaald. Als de groep niet meer als geheel samenwerkt, ontstaan er verschillende processen, die ik niet tegelijkertijd kan begeleiden, terwijl die verschillende processen daar wel om vragen. Verschillen tussen de leerlingen binnen een groepje kunnen heel waardevol zijn. De één heeft meer kennis, de ander is snel geneigd iets te proberen, weer een ander observeert juist heel precies. Het inzicht van de één, brengt de ander op een idee, uitleggen aan een ander, structureert en veroorzaakt beter begrip en zo komt een groep samen verder en haalt ieder individueel lid van de groep er iets uit. In theorie zou dit in iedere willekeurige groep zo kunnen werken, maar in de praktijk is het vooral van belang dat ieder lid van de groep voldoende *het gevoel* heeft er iets uit te kunnen halen. Ik heb gemerkt dat ik dat gevoel tot op zekere hoogte kan en wil beïnvloeden door te benoemen wat ik zie. Ik vind het mooi om te zien hoe

een leerling zelf benoemt dat hij wil oefenen met iets uitleggen aan de groep, nadat ik een keer benoemde dat hij qua kennis makkelijk les zou kunnen geven in de VWO-stof voor wiskunde, maar nog te leren heeft om anderen voldoende mee te nemen in zijn denkprocessen of hoe een andere leerling steeds vaker een inzicht durft te delen, nadat ik een keer benoemde dat ze misschien nog niet zo veel kennis had als sommige andere leerlingen in de groep, maar wel vaak net een andere blik op iets wat de rest van de groep verder helpt. Aan de andere kant probeer ik ervoor te waken dat de leerlingen gaan doen wat *ik* belangrijk vind. Op het gevoel dat bij spelend leren hoort, creëerde ik nieuwe groepjes, waarvan ik vermoedde dat de leden voldoende te brengen en te halen zouden hebben. Dit maakte het meteen weer makkelijker om andere leerlingen, bij wie ik een haakje van mogelijke interesse voor wiskunde voelde, voor te stellen om een keertje mee te doen met het ene of het andere groepje.

Druk en vertrouwen

Verschillende leerlingen in verschillende groepjes heb ik wel eens iets horen zeggen in de strekking van: "Ik doe vandaag niet *echt* mee, ik kijk alleen," waarna ze vervolgens toch deelnamen aan het proces. Ik heb dit geïnterpreteerd en ook wel zo benoemd als een zin om de druk bij zichzelf weg te halen van mogelijke verwachtingen die ik of anderen in de groep van hen zouden kunnen hebben. Terwijl ik specifiek een vorm voor de activiteit kies die laagdrempelig is en dus geen druk zou moeten leggen op de deelnemers en dit bij mijn weten ook op die manier introduceer bij leerlingen, komt dit blijkbaar niet altijd goed uit de verf. Ook een leerling die een tijdje meedeed, maar is afgehaakt, omdat hij zich naar eigen zeggen slecht voelt over zichzelf als hij meedoet, omdat hij steeds het gevoel heeft dat hij dingen zou moeten kunnen, die hij niet kan, laat me nadenken over hoe ik die laagdrempeligheid vormgeef. In het geval dat een leerling er wel bijblijft, maar aangeeft alleen te observeren, ben ik tevreden dat de setting veilig genoeg is om dit aan te geven en zo lang er genoeg andere leerlingen over zijn, die actief zijn, is dit ook geen probleem. Het zou alleen een probleem zijn als iedereen alleen wil observeren, want dan valt er weinig te observeren. Daarnaast lijkt het benoemen van hoe ik een dergelijke zin interpreteer en de gesprekjes daarover een effect te hebben op hoe vrij een leerling zich gaat voelen om toch actiever deel te nemen. Dit blijkt onder andere uit het feit dat mijn collega natuurkunde bij LOS, die een activiteit observeert in het kader van dit onderzoek, specifiek benoemt dat het haar opvalt dat een leerling, van wie ze dit niet zou verwachten, zo open is in het delen van wat ze denkt. De leerling die afhaakt, omdat hij zich slecht voelt over zichzelf, vind ik een stuk lastiger. Ik heb hem feedback gevraagd, uitgelegd hoe ik bezig ben om de activiteit zo in te richten dat er voor iedereen uitdaging op zijn niveau in zit en of hij ideeën had hoe ik dat beter zou kunnen doen, zodat hij zich niet slecht voelt over zichzelf. Volgens hem zou ik dat met een andere inrichting van de activiteit niet voor elkaar kunnen krijgen, maar lag het probleem toch echt bij hem. Ik vind het moeilijk om me daar zo maar bij neer te leggen en vraag me af of ik met een goed getimed vraag of hij niet denkt dat hij zich beter over zichzelf zal gaan voelen als hij in kleine stapjes zich de vaardigheden eigen gaat maken, waarvan hij meent dat hij ze al zou moeten kunnen, iets zou kunnen bereiken, zonder dat ik hem daarmee probeer te forceren in een richting die hij niet wil. Soms lijkt een beeld van het vak wiskunde ook al zo gevormd door negatieve ervaringen dat ik daar met een opmerking over hoe ik de wiskunde zie dat niet zo één, twee, drie veranderd krijg. Het is een beeld dat is ontstaan uit allerlei ervaringen, die ik niet ongedaan kan maken. Daar kan ik alleen in kleine stapjes andere ervaringen tegenover proberen te zetten. Een leerling, waarvan ik weet dat die eerdere ervaringen hem een verkeerd zelfbeeld hebben gegeven ten opzichte van de wiskunde, die een uur lang zeer betrokken is bij een activiteit, waarbij we het aantal knikkers in een bakje op verschillende manieren proberen te bepalen en na afloop positief verrast is dat ik de activiteit heb afgeleid van een HAVO-examenopgaven, geeft me een indicatie dat ik op de goede weg ben in de vormgeving van de activiteit.

Anders kijken naar doelen

Steeds als ik voor mezelf doelen probeer te formuleren, kom ik tot de conclusie dat dat doel geen doel op zich zou moeten zijn, maar eigenlijk weer een middel is tot iets anders en als ik dan dat 'iets anders' concreet probeer te maken, blijkt ook dat weer geen doel op zich. Dat probleem ondervond ik met het formuleren van ontwerpeisen en zie ik terug in grote maatschappelijke processen, zoals economische groei als uitgangspunt voor het inrichten van een samenleving. Mijn collega filosofie, die een bijdrage leverde aan dit onderzoek door mee te lezen met mijn schrijfsels in de fase van literatuurverkenning en een activiteit observeerde, gaf aan dat hoewel DOE040 weliswaar niet werkt met duidelijk omschreven leerdoelen, er wel veel duidelijkere procesdoelen zijn dan op de reguliere scholen, waar hij ook werkzaam is, en doelt daarmee op de besluitvormings- en conflictbemiddelingsprocessen die middels een sociocratisch model zijn vormgegeven. Hoewel ik het een interessant perspectief vind, doorbreekt dit de doel-middelcirkelredenering niet. Want is een procesdoel niet precies de kern van waar ik in mijn gedachte vastloop, van een middel, namelijk het proces, een doel maken? Gedurende het onderzoek kom ik een aantal keer in de situatie dat een activiteit minder lekker loopt, omdat ik achteraf bezien toch te veel bezig ben om een specifiek doel te bereiken. Mijn filosofie collega merkt naar aanleiding van zijn observatie op dat hij me vrij veel vragen hoort stellen die het groepje een bepaalde richting opstuurt. Ook mijn natuurkunde collega, die mijn activiteiten van twee verschillende groepjes achter elkaar observeert, merkt een verschil in hoe ik bij het ene groepje duidelijker een bepaald doel voor ogen heb, waardoor ik te snel wil en minder goed oog lijk te hebben voor waar de leerlingen zitten in het proces. De activiteit lijkt dus minder goed te slagen als ik specifiek ergens op aanstuur. Aan de andere kant is de activiteit ook niet geslaagd als hij geen doel dient. Leerlingen blijven alleen deelnemen als ze er iets uit kunnen halen, als het plezierig is, ze het gevoel hebben dat het hen verder brengt. De activiteiten tijdens dit onderzoek hebben me een aantal keren laten ervaren wat Martens (2019) bedoelt met de paradox van spelen en wat Gray (2010) beschreef als dynamiek die ontstaat bij didactische wiskunde. De activiteiten verliepen stroever als ik te veel bezig was met een beoogd doel en vloeiender op de momenten dat ik in staat was om helemaal in het moment aanwezig te zijn. De paradox is dat het plezier en in het moment aanwezig zijn tijdens die activiteit, niet kan bestaan zonder doelen. Ik heb geen plezier in die activiteit als ik niet in staat ben om ontwikkeling te constateren en daarmee betekenis te geven aan wat we aan het doen zijn. Die ontwikkeling kan ik alleen maar constateren als ik mezelf bepaalde doelen stel, maar zodra ik die doelen te concreet probeer te maken en die concrete doelen te serieus ga nemen, vervliegt dat plezier. Zodra ik plezier op zich als doel neem, vervliegt het plezier, omdat het geen recht doet aan de onderliggende complexiteit die ik juist zo interessant vind.

Helpende of knellende structuren?

Ik heb verschillende docenten met heel verschillende achtergronden mijn activiteiten in het kader van dit onderzoek laten observeren. Omdat de kleine scholen waarvoor ik werk voor ieder vak slechts één vakdocent beschikbaar hebben, kon ik geen wiskundecollega's hiervoor vragen. Dit is aan de ene kant jammer en aan de andere kant zijn de gestelde ontwerpeisen breed genoeg om hierop de feedback te kunnen vragen aan collega's met andere vakgebieden als expertise. Dat ik hierbij uitgekomen ben bij collega's van aangrenzende vakgebieden als natuurkunde en filosofie ligt denk ik vrij voor de hand, maar de keuze voor mijn collega Spaans is wellicht verrassender. Ik heb hem hiervoor gevraagd, omdat ik hem het meest van al mijn collega's zie worstelen met de visie van de school en zijn rol als docent daarbinnen en ik ben daarom benieuwd wat hij ziet als hij naar mijn activiteit kijkt. Hij vindt het lastig om feedback te geven, omdat ik hem weliswaar heb verteld en heb laten lezen hoe ik mijn onderzoek heb vormgegeven, hij toch een kader mist om zijn observaties in te plaatsen en hij stelt dan ook voor om op een later moment nog eens te komen observeren met een

observatielijst, waarin hij leerlinggedrag kan plaatsen. Ik snap wel dat een dergelijke structuur houvast kan bieden bij een observatie, maar ik ben juist geïnteresseerd in wat gezien wordt buiten dat soort structuren om. Het zet me aan het denken. Is er een structuur nodig om buiten de structuur te kunnen denken? Wanneer is een structuur helpend en wanneer gaat het juist knellen? Ondanks dat hij het lastig vindt om feedback te geven op de activiteit volgt wel een interessant gesprek over de overeenkomsten in het leren van wiskunde en het leren van een taal. Heb je eerst basiskennis nodig om daarna pas te kunnen communiceren of problemen op te lossen of ga je gewoon proberen en doen en pik je de kennis gaandeweg op. Een beginner leert niet hetzelfde als een expert, maar wanneer je op welk gebied iemand als beginner of expert beschouwt is een kwestie van aanvoelen in interactie, waar je door ervaring steeds beter in kunt worden. Hoe dan ook lijken we allemaal behoefte te hebben aan een structuur en ook allemaal de behoefte om dan weer aan die structuur te willen ontsnappen.

Tot slot

Gedurende het onderzoek zag ik steeds meer leerlingen met plezier met wiskunde bezig zijn en wiskundig inzichten verwerven. In die zin ben ik tevreden over de ontwikkeling van de activiteit. Ook leverde het onderzoek weer aanknopingspunten om verder te onderzoeken en te verbeteren, zo zullen de wiskundige activiteiten die ik organiseer verder evolueren. Ik ben er nog niet uit of ik zou willen dat we in het echte leven meer spelen of dat we spelen meer gaan zien als het echte leven. Als je spel van kinderen observeert, dan is dat namelijk tegelijkertijd zowel oefenen voor het echte leven als het echte leven zelf, zowel nabootsen als zelf creëren, zowel zelf oplossingen bedenken als kijken naar hoe anderen dat doen, zowel vrij zijn in handelen als de consequenties dragen van wat dat handelen teweeg brengt.

Literatuur

Barton, C. (2018), Volgens Barton, Phronese, Culemborg.

Boaler, J. (2016), Mathematical mindsets, Jossey-Bass, San Francisco.

Geary, D (1995), Reflections of Evolution and Culture in Children's Cognition: Implications for Mathematical Development and Instruction, in *American Psychologist*, January 1995 Vol. 50, No. 1, 24-37

Martens, R. (2019), We moeten spelen: Wat onderwijs aan een verkenning van onze natuur heeft, Driebergen: NIVOZ.

Gray, P. (2010), <https://www.psychologytoday.com/gb/blog/freedom-learn/201004/kids-learn-math-easily-when-they-control-their-own-learning> (geraadpleegd op 18-10-2021)

Gray, P. (2010), <https://www.psychologytoday.com/gb/blog/freedom-learn/201003/when-less-is-more-the-case-teaching-less-math-in-school> (geraadpleegd op 18-10-2021)

Sweller, J. (2021), Why Inquiry-based Approaches Harm Students' Learning, Analysis Paper 24, The center for independent studies.